

# Spis treści

Słowo wstępne . . . . .	7
Wykaz symboli . . . . .	9
<b>1. Pojęcia wstępne . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1. Przestrzeń topologiczna . . . . .	13
1.2. Przestrzeń metryczna . . . . .	15
1.3. Struktury algebraiczne . . . . .	18
1.3.1. Działania . . . . .	18
1.3.2. Półgrupa . . . . .	18
1.3.3. Grupa . . . . .	18
1.3.4. Pierścień . . . . .	18
1.3.5. Ciało . . . . .	19
1.3.6. Przestrzeń wektorowa . . . . .	19
1.3.7. Algebra . . . . .	20
1.3.8. Izomorfizm struktur algebraicznych . . . . .	20
1.4. Przestrzeń liniowo-topologiczna . . . . .	20
1.5. Pochodna słaba (uogólniona) . . . . .	23
<b>2. Przestrzeń Banacha . . . . .</b>	<b>25</b>
2.1. Przestrzeń unormowana i algebra unormowana . . . . .	25
2.2. Szeregi w przestrzeniach unormowanych . . . . .	30
2.3. Przykłady przestrzeni Banacha . . . . .	32
2.3.1. Przestrzeń funkcji ciągłych na przedziale $[a, b]$ . . . . .	32
2.3.2. Przestrzeń $\ell_p$ . . . . .	36
2.3.3. Przestrzeń $L_p$ . . . . .	41
2.4. Operacje liniowe w przestrzeniach Banacha . . . . .	52
2.4.1. Odwzorowanie liniowe . . . . .	52
2.4.2. Odwzorowanie liniowe ograniczone . . . . .	55
2.4.3. Przykłady odwzorowań liniowych . . . . .	61
2.5. Operatory liniowe w przestrzeni $B(X, Y)$ . . . . .	64
2.5.1. Twierdzenie Banacha–Steinhaus . . . . .	66
2.5.2. Twierdzenie Banacha o odwzorowaniu otwartym . . . . .	67
2.5.3. Twierdzenie Banacha o izomorfizmie . . . . .	71
2.5.4. Twierdzenie Banacha o wykresie domkniętym . . . . .	72
2.5.5. Twierdzenie o obrazie domkniętym . . . . .	74

2.6.	Operatory domknięte . . . . .	75
2.6.1.	Przykłady operatorów domkniętych . . . . .	77
2.7.	Przestrzeń sprzężona . . . . .	79
2.8.	Zbieżność w przestrzeni Banacha . . . . .	80
2.9.	Twierdzenie o zanurzeniu przestrzeni unormowanej w przestrzeni Banacha . . . . .	82
2.10.	Twierdzenie Banacha o rozszerzeniu odwzorowania jednostajnie ciągłego . . . . .	87
2.11.	Twierdzenie Hahna–Banacha . . . . .	89
2.12.	Algebra Banacha operatorów liniowych ograniczonych . . . . .	94
2.13.	Rezolwenta i widmo operatora liniowego . . . . .	96
2.13.1.	Wartości własne i wektory własne – przykłady . . . . .	103
2.14.	Operatory zwarte w przestrzeni Banacha . . . . .	106
<b>3.</b>	<b>Przestrzeń Hilberta . . . . .</b>	<b>119</b>
3.1.	Iloczyn skalarny . . . . .	119
3.2.	Wzór polaryzacyjny . . . . .	123
3.3.	Rzut prostopadły – część 1 . . . . .	127
3.4.	Szeregi ortogonalne . . . . .	134
3.5.	Funkcjonały w przestrzeni Hilberta . . . . .	143
3.6.	Operatory sprzężone w przestrzeni Hilberta . . . . .	150
3.6.1.	Przykład operatora sprzężonego . . . . .	152
3.6.2.	Własności operatorów sprzężonych . . . . .	153
3.6.3.	Dekompozycja (rozkład) przestrzeni Hilberta . . . . .	160
3.7.	Klasyfikacja operatorów w przestrzeni Hilberta . . . . .	160
3.7.1.	Operator normalny . . . . .	161
3.7.2.	Podprzestrzeń niezmiennicza i redukująca . . . . .	166
3.7.3.	Operator unitarny . . . . .	170
3.7.4.	Operator symetryczny i samosprężony . . . . .	172
3.7.5.	Przykłady operatorów symetrycznych i samosprężonych . . . . .	173
3.8.	Rzut prostopadły – część 2 . . . . .	176
3.8.1.	Własności rzutu prostopadłego . . . . .	176
3.9.	Twierdzenie spektralne . . . . .	178
<b>Literatura</b>	. . . . .	<b>183</b>